ENS de LYON
Filière MP - Session 1967
Durée : 4 heures

La question 1. demande beaucoup de soin dans le maniement des divers indices, on pourra admettre le résultat de a) pour traiter b).

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n, avec $P = b_0X^n + b_1X^{n-1} + ... + b_n$ de racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. On note $S_k(P) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k$ la somme de Newton d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de P et $\sigma_k(P)$ le polynôme symétrique élémentaire d'ordre $k \in [\![1, n]\!]$ des racines de P. On note $P_i = \dfrac{P}{X - \beta_i}$, de polynômes symétriques élémentaires $\sigma_k^{(i)}$ où $k \in [\![1, n-1]\!]$.

(a) Exprimer σ_k en fonction des $\sigma_j^{(i)}$ (où i est fixé et j varie), puis l'inverse. On sait que $P' = \sum_{i=1}^{n} P_i$.

Montrer que l'on a les formules :

$$b_0S_p + b_1S_{p-1} + \cdots + b_{p-1}S_1 + p\,b_p = 0$$

pour $1 \leq p \leq n$.

(b) Montrer que l'on peut exprimer les polynômes symétriques élémentaires de P en fonction des sommes de Newton de P d'ordres $k \in [\![1, n]\!]$, et réciproquement.

(c) Montrer que

$$b_0S_{n+k} + \cdots + b_iS_{n-i+k} + \cdots + b_nS_k = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On voit ainsi que le polynôme P/b_0, supposé de degré n, est entièrement déterminé par la donnée de ses σ_i ou par celle de la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (sous réserve que la suite S_k vérifie une récurrence linéaire d'ordre n).

2. Soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ de degrés respectifs n et m, de coefficients dominants b_0 et c_0. On suppose que les sommes de Newton sont les mêmes : $S_k(P) = S_k(Q)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que toute racine non nulle de P est aussi racine de Q, avec le même ordre. Quelle relation existe-t-il entre P et Q ?

3. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p sur $\mathbb{C}$, $X \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $\mathrm{tr}(X)$ la trace de X.

(a) Soient $X, Y \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Comparer $\mathrm{tr}(XY)$ et $\mathrm{tr}(YX)$. Donner un exemple (simple !) tel que $\mathrm{tr}(XYZ) \neq \mathrm{tr}(XZY)$.

(b) Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_p$ telle que $f(X) = \mathrm{tr}(MX)$ pour tout $X \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.
Montrer que si $f(XY) = f(YX)$ pour tous $X, Y \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(.) = \alpha\,\mathrm{tr}(.)$. On pourra utiliser une base de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

4. On admet que toute matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est triangulable. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

(a) Soit λ valeur propre de A, que peut on dire pour A^k ? Quelle réciproque verriez vous ? Que se passe-t-il si A est à coefficients réels et si l'on ne s'intéresse qu'aux valeurs propres réelles de A et A^k ?

(b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes ou non) de A. Exprimer $\mathrm{tr}(A^k)$.

(c) Retrouver les résultats a) et b) sans utiliser les possibilités de triangulation de A et A^k (cas complexe uniquement).

Les questions V et VI sont entièrement indépendantes et aboutissent à un même résultat, par deux méthodes différentes.

5. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{(n,m)}(\mathbb{C})$. ($\mathscr{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients complexes)

(a) Soit λ une valeur propre non nulle de BA. Est elle valeur propre de AB ?

(b) On suppose, pour cette question seulement, que $m = n$. Montrer que si 0 est valeur propre de BA, 0 est aussi valeur propre de AB.

(c) Montrer, par un exemple simple, que le résultat de b) est en général faux si $m \neq n$. A-t-on en général $\det(AB) = \det(BA)$?

(d) Comparer $\operatorname{tr}(AB)$ et $\operatorname{tr}(BA)$ puis $\operatorname{tr}((AB)^k)$ et $\operatorname{tr}((BA)^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(e) Établir une relation entre les polynômes caractéristiques de AB et BA.

6. Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \in \mathscr{M}_{(n,m)}(\mathbb{C})$ où $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On suppose d'abord que $a_{i,i} = 1$ pour $1 \leq i \leq r$, où $1 \leq r \leq \inf(n, m)$, et $a_{i,j} = 0$ pour les autres coefficients. Retrouver ainsi la relation existant entre les polynômes caractéristiques de AB et BA.

(b) Retrouver ce résultat pour A quelconque.

Fin de l'épreuve